HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 4

Die Zurückführung eines allgemeinen Schwingungssystems auf ein kettenförmiges System

Dr.-Ing. WILHELM KLEIN

1 9 5 6

Die Zurückführung eines allgemeinen Schwingungssystems auf ein kettenförmiges System

Zusammenfassung

Zur Bestimmung der Eigenschwingungszahlen eines beliebig verzweigten Drehschwingungssystems kann man ein solches System zunächst in eines mit durchlaufender Welle umwandeln, das sich dann zeichnerisch weiterbehandeln lässt. Für diese Umwandlung wurde kürzlich von S. FALK ein Verfahren angegeben, das auf einer Matrizentransformation beruht. Der vorliegende Bericht bringt ein anderes Verfahren, das mit den Mitteln der Netzwerksynthese arbeitet.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter

gez. Klein

(Dr.-Ing. Wilh. Klein)

Der Abteilungsleiter

gez: Rothert

(Prof. Dr.-Ing. G. Rothert)

Der Institutsdirektor

gez: Rothert

(Prof. Dr.-Ing. G. Rothert)

Berlin - Charlottenburg, den 2. August 1956

<u>Die Zurückführung eines allgemeinen Schwingungssystems auf ein kettenförmiges System</u>

<u>Aufgabenstellung.</u>

Eine federnde Maschinenwelle ohne Abzweigungen, die nach Abb. 1 mit einer Anzahl von Trägheitsmomenten besetzt ist, hat mehrere Torsionseigenfrequenzen, deren Kenntnis für die Praxis wichtig ist, da ein längerer Betrieb in der Nähe dieser Frequenzen ge-

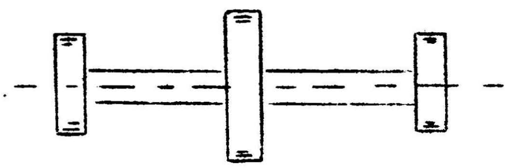


Abb. 1. Welle mit 3 Drehmassen

fährlich ist. Zur Bestimmung dieser Eigenfrequenzen gibt es verschiedene rechnerische oder zeichnerische Verfahren; insbesondere wendet man gern das zeichnerische Verfahren von BARANOW an. Für Anlagen mit Verzweigungen wie z.B. Abb. 3 ist dieses Verfahren jedoch nicht anwendbar. Man kann aber so vorgehen, dass man vorab dieses allgemeine System in ein äquivalentes System mit durchlaufender Welle nach Abb. 1 umwandelt, das die gleichen Eigenfrequenzen besitzt; diese ermittelt man dann z.B. mit dem BARANOW-Verfahren. Wir wollen uns in diesem Aufsatz nur mit der Umwandlung der b eiden Schwingungssysteme ineinander befassen.

In mathematischer Formulierung sieht das Problem folgendermassen aus:

Wir setzen sinusförmige Erregung voraus und betrachten bei einem beliebig verzweigten System an jeder Drehmasse k (k=1..n) dass äussere Drehmoment M_k und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_k$. Die M_k sind lineare Funktionen sämtlicher $\dot{\varphi}_i$ (i=1...n); die quadratische symmetrische Koeffizientenmatrix dieses linearen Gleichungssystems[1)] sei mit y bezeichnet, so dass man schreiben

[1)] In der Regel betrachtet man die Drehmomente M als Funktion der Drehwinkel φ. Wir verwenden hier statt dessen wegen der elektrischen Analogie die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$.

kann (M und ϕ sind Spaltenmatrizen):

$$M = y \dot{\phi} \tag{1}$$

y ist eine Funktion der Kreisfrequenz ω bzw. des komplexen Frequenzparameters

$$p = j\,\omega \tag{2}$$

und lässt sich in folgender Form darstellen[2]

$$y = A/p + p\,\Theta \tag{3}$$

A heisst Federungsmatrix, Θ Trägheitsmatrix. Beide Matrizen sind reell und frequenzunabhängig, A ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen, Θ ist eine Diagonalmatrix.

Elektrische Schaltungen aus diskreten Schaltelementen lassen sich nach dem gleichen Rechenverfahren behandeln, nur ist bei ihnen die Frequenzabhängigkeit von y in der Regel allgemeiner. Die einzelnen Elemente von y sind nämlich in diesem Fall gebrochene rationale Funktionen von p.

Die Eigenfrequenzen erhalten wir, wie im Anhang gezeigt wird, aus der Gleichung

$$\det y = 0. \tag{4}$$

Da sämtliche Trägheitsmomente Θ_k von Null verschieden sind, ist die Trägheitsmatrix Θ regulär und es existiert Θ^{-1}. Wir können also für (4) auch schreiben (E = Einheitsmatrix):

$$\det\left[(A\Theta^{-1} + p^2E)\,\Theta/p\right] = \det\,(A\Theta^{-1} + p^2E)\,\det\,\Theta/p = 0$$

und da $\det\Theta \neq 0$ ist, ergibt sich mit $-p^2 = \omega^2 = \lambda$

$$\det\,(A\Theta^{-1} - \lambda E) = 0\,. \tag{5}$$

Wir können also die Eigenfrequenzen statt aus (4) auch durch Auflösen der sog. charakteristischen Gleichung (5) der Matrix $A\Theta^{-1}$ erhalten.

Wir wollten hier aber den Fall betrachten, wo es aus rechentechnischen Gründen nicht zweckmässig ist, (4) oder (5) unmittelbar aufzulösen, sondern wo man sich zunächst eine Anordnung mit durchlaufender Welle berechnet, die die gleichen

---

[2] S. FALK, Die Abbildung eines allgemeinen Schwingungssystems auf eine einfache Schwingerkette. Ingenieur-Archiv XXIII (1955), 314 - 328. Dort weitere Literatur.

Eigenfrequenzen hat. Bei einem solchen kettenförmigen System ist die Federungsmatrix A eine sog. Dreiermatrix,[3] d.h. es verschwinden alle Elemente, die nicht in der Hauptdiagonalen oder den beiden parallel dazu verlaufenden benachbarten Nebendiagonalen liegen. Da die Trägheitsmatrix Θ immer eine Diagonalmatrix ist, ist $A\Theta^{-1}$ ebenfalls eine Dreiermatrix. Nach FALK kann man nun im allgemeinen Fall, wo A und $A\Theta^{-1}$ keine Dreiermatrizen sind, so vorgehen: Wenn es gelingt, eine reguläre Transformationsmatrix R zu finden, so dass $R'A\Theta^{-1}R$ eine Dreiermatrix wird,[4] die die gleichen Eigenfrequenzen wie $A\Theta^{-1}$ ergibt, dann kann man diese Eigenfrequenzen auch an der durch die transformierte Matrix gegebenen vereinfachten Anordnung bestimmen. Wenn R der Bedingung $R'R = E$ genügt, ist nämlich:

$$\det(R'A\Theta^{-1}R - \lambda E) = \det(R'A\Theta^{-1}R - \lambda R'R) = \det\left[R'(A\Theta^{-1} - \lambda E)R\right]$$

$$= \det R' \det(A\Theta^{-1} - \lambda E) \det R = \det(R'R) \det(A\Theta^{-1} - \lambda E) = \det(A\Theta^{-1} - \lambda E),$$

d.h. die charakteristischen Gleichungen und damit die Eigenfrequenzen beider Matrizen sind gleich. FALK hat eine Rekursionsformel zur Auffindung der Transformationsmatrix R angegeben, so dass damit die Aufgabe gelöst ist.

In der vorliegenden Arbeit wird mit dem gleichen Ziel ein anderes Verfahren entwickelt, dass die Begriffe der Theorie der elektrischen Netzwerke verwendet. Dadurch können aus der Netzwerksynthese bekannte Rechenverfahren übernommen werden. Zu diesem Zweck wird zunächst die Abbildung der mechanischen Gebilde auf elektrische Schaltungen durchgeführt; sie bietet keinerlei Schwierigkeiten.

Der Aufwand der Zahlenrechnung für verwickeltere Anordnungen dürfte bei dem FALKschen und dem hier vorgelegten Verfahren etwa gleich sein.

---

3) FALK a.a.O.

4) R' = gespiegelte Matrix zu R.

Abbildung des Drehschwingungssystems auf eine elektrische Schaltung.

Zur Abbildung eines mechanischen auf ein elektrisches System gibt es bekanntlich die Kraft - Spannungs - Analogie und die Kraft - Strom - Analogie. Für unseren Zweck kommt nur die letztere in Frage, weil nur bei ihr die mechanische Schaltung und die elektrische Schaltung die gleiche Form haben [5]. Unter der Voraussetzung erzwungener sinus-förmiger Schwingungen benutzen wir die komplexe Schreibweise mit der Abkürzung $j\,\omega=p$ für den komplexen Frequenzparameter. Man erhält aus den

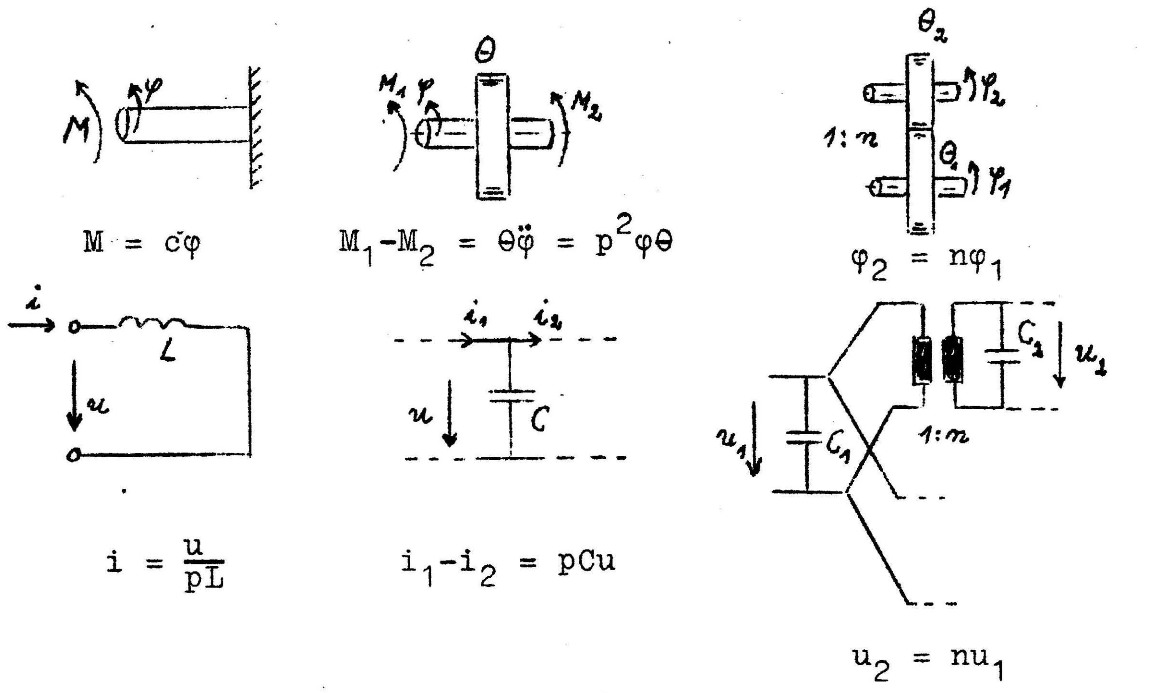


Abb. 2 Analoge mechanische und elektrische Elemente

Analogien der Abb. 2 folgende Entsprechungen:

Drehmoment M ... Strom i

Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = p\varphi$ ... Spannung u

Drehwinkel φ .... u/p

Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi} = p^2\varphi$ ... p u

Federkonstante c ... reziproke Induktivität 1/L

Trägheitsmoment Θ ... Kapazität C

Zahnradübersetzung 1 : n ... Windungszahlverhältnis 1 : n des idealen Transformators.

---

[5] Vgl. auch K. KLOTTER, Die Analogien zwischen elektrischen und mechanischen Schwingern. Ing.Arch. XVIII (1950), 291 - 301

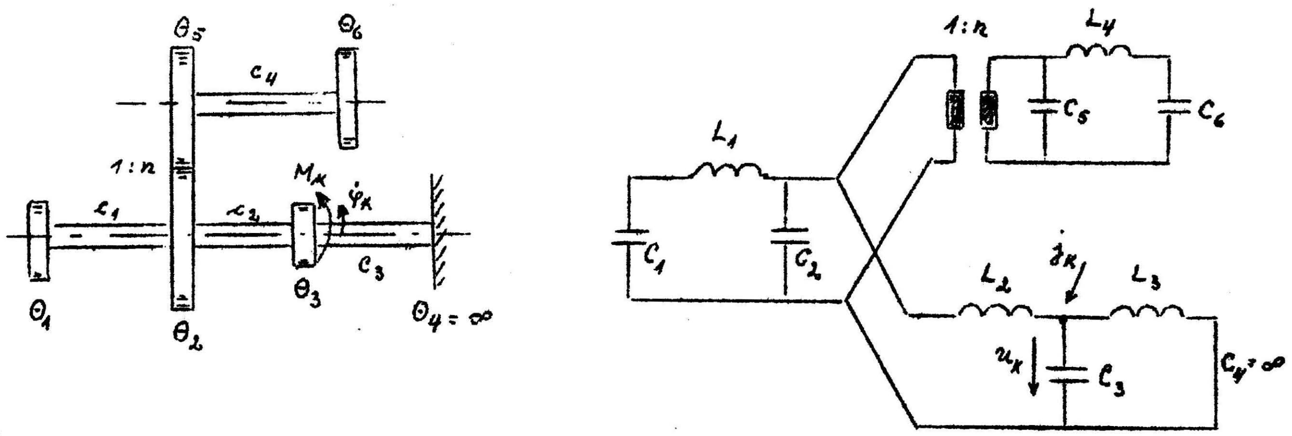


Abb. 3 Analoge mechanische und elektrische Schaltungen

In Abb. 3 sind hiernach zwei analoge mechanische und elektrische Schaltungen, die eine Verzweigung enthalten, angegeben.

Eigenschwingungszahlen und Eingangsleitwert.

Wir nehmen an, dass an der Drehmasse mit der Nummer k ein äusseres Drehmoment M_k angreift bzw. dass im elektrischen Fall im Knoten k eine Einströmung j_k vorhanden ist. In Abhängigkeit von der Frequenz entsteht dadurch an dieser Stelle die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_k$ (die Spannung u_k). Wir nennen den Quotienten $M_k/\dot{\varphi}_k$ (bzw. j_k/u_k) den Eingangsleitwert[6] des Systems an diesem Punkt k. Diese Grösse ist eine rationale Funktion der Frequenz und ihre Nullstellen sind die gesuchten Eigenfrequenzen des Systems, da bei diesen Frequenzen bereits bei verschwindender Erregung M_k bzw. j_k eine Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_k$ bzw. eine Spannung u_k auftritt. Man kann sich also eine Bildwelle (eine Ersatzschaltung) errechnen, die den gleichen Eingangsleitwert wie das gegebene System hat und an dieser statt an dem Originalsystem die Eigenfrequenzen bestimmen, falls das einfacher ist.

Man erhält an den verschiedenen Erregungspunkten k verschiedene Ersatzsysteme, die aber natürlich alle dieselben Eigenfrequenzen liefern, wenn auch, wie später gezeigt wird, nicht in allen

---

6) Diese Bezeichnung geht vom elektrischen Fall aus und gilt im mechanischen Fall nur hinsichtlich dieser Analogie. Im allgemeinen würde man hier nämlich von einem Widerstand sprechen.

Fällen sämtliche Eigenfrequenzen.

Der Eingangsleitwert eines Systems lässt sich grundsätzlich leicht aus der Leitwertmatrix y, die durch (1) definiert ist, berechnen. Im mechanischen Fall geht man gewöhnlich so vor, dass man aus der potentiellen Energie U und der kinetischen Energie T die Federungsmatrix A und die Trägheitsmatrix Θ und daraus y nach (3) errechnet. Für eine elektrische Schaltung ohne Uebertrager findet man y nach folgendem Rezept: Die Hauptdiagonalelemente enthalten die Summe sämtlicher Leitwerte, die von dem zugehörigen Knoten ausgehen. Die übrigen Elemente sind (mit negativen Vorzeichen) diejenigen Leitwerte, die den zugehörigen beiden Hauptdiagonalelementen gemeinsam sind. Den Eingangsleitwert am Knoten k $M_k/\dot{\varphi}_k = y_k$ bzw. $j_k/u_k = y_k$ erhält man als Quotient zweier Determinanten dieser Matrix y, nämlich der Matrixdeterminanten det y sowie derjenigen Determinanten $\det_{kk} y$, die durch Wegstreichen der k-ten Zeile und Spalte entsteht:

$$y_k = \frac{\det y}{\det_{kk} y} \qquad (6)$$

In manchen Fällen ist es jedoch bequemer, denEingangsleitwert unmittelbar aus den Leitwerten der einzelnen Schaltungsteile zu berechnen.

Entwicklung des Systems mit durchlaufender Welle (Abzweigschaltung) aus dem Eingangsleitwert.

Der Eingangsleitwert y_k ist eine gebrochene rationale Funktion von p, also der Quotient von zwei Polynomen von p (vgl. die beiden Beispiele). Die Eigenfrequenzen könnte man also aus den Nullstellen des Zählerpolynoms bestimmen. Wir wollten hier jedoch ein System mit durchlaufender Welle suchen, das den gleichen Eingangsleitwert y_k hat, wie unser gegebenes System.

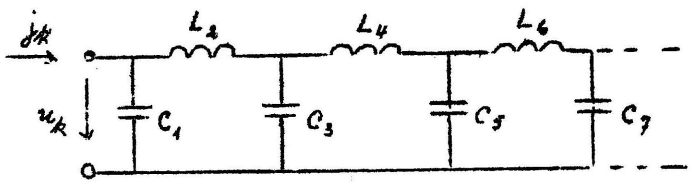


Abb. 4 Abzweigschaltung

Elektrisch entspricht, wie man anhand von Abb. 3 erkennt, einer durchlaufenden Welle eine sog. Abzweigschaltung nach Abb. 4 mit den Querleitwerten pC_1, pC_3, ... und den Längswiderständen pL_2, pL_4 .... Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass sich parallelgeschaltete Leitwerte addieren, ebenso reihengeschaltete Widerstände, und dass der Leitwert ein reziproker Widerstand ist, erhält man für den Eingangsleitwert einer solchen Abzweigschaltung die bekannte Kettenbruchformel [7]:

$$y_k = pC_1 + \cfrac{1}{pL_2 + \cfrac{1}{pC_3 + \cfrac{1}{pL_4 + \dots}}} \qquad (7)$$

Wenn also y_k gegeben ist, kann man hieraus die Schaltelemente C_1, L_2, C_3 ... der Abzweigschaltung und damit die Bildwelle durch Kettenbruchentwicklung gewinnen.

Zahlenbeispiel 1

Um einen Vergleich mit dem FALKschen Verfahren zur Ermittlung der Bildwelle zu ermöglichen, behandeln wir jetzt zwei der in der FALKschen Dissertation durchgerechnete Zahlenbeispiele.

Das erste von FALK behandelte Beispiel Abb. 5 bezieht sich nicht

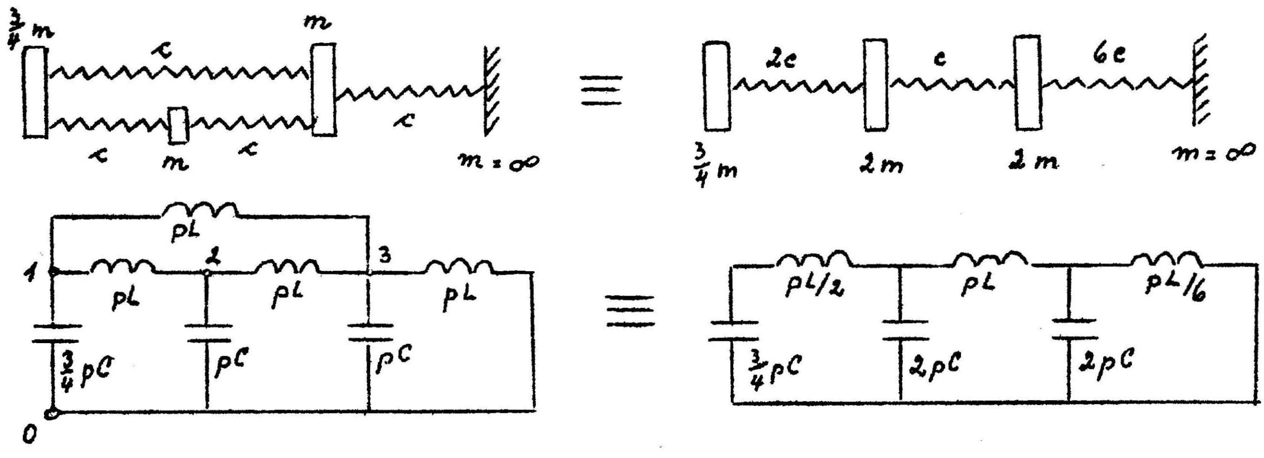


Abb. 5 Zahlenbeispiel 1.

[7] Die Richtigkeit dieser Formel (7) sieht man folgendermassen ein: Der Eingangsleitwert y_k ist gleich dem Leitwert pC_1 des Kondensators plus dem Leitwert der übrigen Schaltung. Da diese aber mit dem Längswiderstand pL_2 anfängt, betrachtet man statt dessen den reziproken Wert als Widerstand. Dieser Widerstand ist gleich pL_2 plus dem Widerstand der Restschaltung, die mit dem Leitwert pC_3 anfängt usw.

auf Drehschwingungen, sondern behandelt ein Schwingungssystem aus Masse und Federn, für das die elektrische Analogie entsprechend gilt. In Abb. 5 ist darunter die analoge elektrische Schaltung angegeben. Sie hat ausser dem Bezugsknoten 0 die drei Knoten 1, 2 und 3, die Leitwertmatrix hat daher folgende Form:

$$y = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}pC+\frac{1}{pL}+\frac{1}{pL} & -\frac{1}{pL} & -\frac{1}{pL} \\ -\frac{1}{pL} & \frac{1}{pL}+\frac{1}{pL}+pC & -\frac{1}{pL} \\ -\frac{1}{pL} & -\frac{1}{pL} & \frac{1}{pL}+\frac{1}{pL}+\frac{1}{pL}+pC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}pC+\frac{2}{pL} & -\frac{1}{pL} & -\frac{1}{pL} \\ -\frac{1}{pL} & \frac{2}{pL}+pC & -\frac{1}{pL} \\ -\frac{1}{pL} & -\frac{1}{pL} & \frac{3}{pL}+pC \end{pmatrix}$$

Aus dieser Matrix bilden wir die beiden Determinanten det y und $\det_{11}$ y. Nach Ausrechnen dieser Determinanten ergibt sich [8)]

$$\det y = \frac{3}{4}p^3 + \frac{23}{4}p + \frac{47}{4p} + \frac{5}{p^3}$$

$$\det_{11} y = p^2 + 5 + \frac{5}{p^2}$$

Also ist der Eingangsleitwert am Knoten 1:

$$y_1 = \frac{3p^6 + 23p^4 + 47p^2 + 12}{4p^5 + 20p^3 + 20p}$$

Die Kettenbruchentwicklung besteht darin, dass man den Zähler von y_1 durch den Nenner dividiert, von dem Rest den reziproken Wert nimmt und wieder dividiert usw:

$$(3p^6+23p^4+47p^2+12) : (4p^5+20p^3+20p) = \frac{3}{4}p, \text{ d.h. } C_1 = \frac{3}{4}C$$

$$\frac{3p^6+15p^4+15p^2}{8p^4+32p^2+12}$$

$$(4p^5+20p^3+20p) : (8p^4+32p^2+12) = \frac{p}{2}, \text{ d.h. } L_2 = \frac{1}{2}L$$

$$\frac{4p^5+16p^3+6p}{4p^3+14p}$$

8) Zur Vereinfachung der Schreibarbeit wurde jetzt C und L gleich 1 gesetzt.

$$(8p^4+32p^2+12) : (4p^3+14p) = 2\,p, \text{ d.h. } C_3 = 2\,C$$

$$\underline{8p^4+28p^2}$$

$$4p^2+12$$

$$(4p^3+14p) : (4p^2+12) = p\,, \text{ d.h. } L_4 = L$$

$$\underline{4p^3+12p}$$

$$2p$$

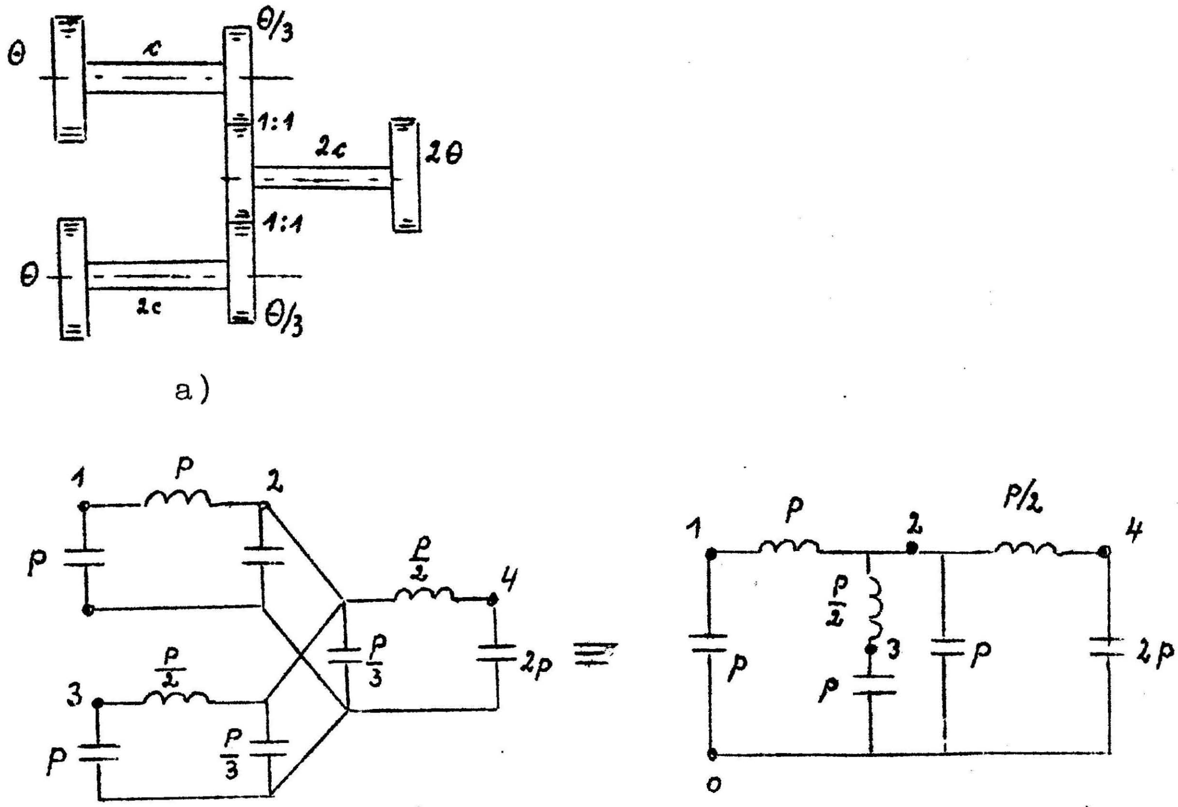
$$(4p^2+12) : 2\,p = 2\,p, \text{ d.h. } C_5 = 2\,C$$

$$2\,p : 12 = \frac{p}{6}, \text{ d.h. } L_6 = L/6$$

Es ergibt sich also die in Abb. 5 angegebene Abzweigschaltung und damit in Uebereinstimmung mit FALK das darüberstehende mechanische System.

Zahlenbeispiel 2

Weiterhin behandeln wir ein Drehschwingungssystem, das nur in der FALKschen Dissertation, aber nicht in der Veröffentlichung enthalten ist.



b) c)

Abb. 6 Zahlenbeispiel 2

Es handelt sich um das Drehschwingungssystem der Abb. 6. Da die beiden auftretenden Uebersetzungen den Wert 1 : 1 haben, können die entsprechenden Uebertrager im elektrischen Ersatzbild weggelassen werden und man erhält so das Ersatzsystem Abb. 6 b bzw. 6 c. Die Schaltung hat 4 Knoten ausser dem Bezugsknoten 0, die wie in Abb. 6 angegeben benummert sind. Man liest aus der Schaltung folgende Leitwertmatrix ab:

$$y = \begin{pmatrix} 1/p + p & -1/p & 0 & 0 \\ -1/p & 5/p + p & -2/p & -2/p \\ 0 & -2/p & 2/p + p & 0 \\ 0 & -2/p & 0 & 2/p + 2p \end{pmatrix}$$

Daraus berechnen sich folgende Determinanten:

$$\det y = \frac{2}{p^3}\,(p^7 + 9p^5 + 18p^3 + 10p)$$

$$\det\nolimits_{11} y = \frac{2}{p^3}\,(p^6 + 8p^4 + 11p^2 + 2)$$

Für den Eingangsleitwert im Punkte 1 erhält man daher

$$y_1 = \frac{p^7 + 9p^5 + 18p^3 + 10p}{p^6 + 8p^4 + 11p^2 + 2}$$

und durch die Kettenbruchentwicklung

$$y_1 = p + \frac{1|}{|p} + \frac{1|}{|p} + \frac{1|}{|p/4} + \frac{1|}{|8p/3} + \frac{1|}{|9p/4} + \frac{1|}{|p/3}$$

also in Uebereinstimmung mit FALK eine Ersatzschaltung Abb. 7

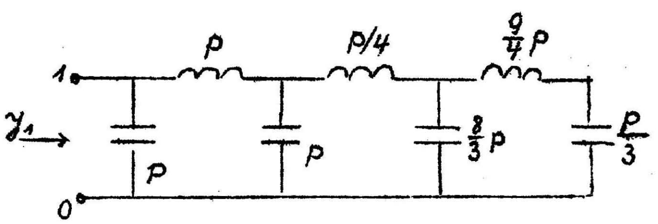


Abb. 7 An Knoten 1 äquivalente Abzweigschaltung zu Abb. 6

aus der man nach dem BARANOW- Verfahren die 4 Eigenfrequenzen bestimmen kann.

Nimmt man jedoch die Erregung in Punkt 2 an, so erhält man

$$\det_{22} y = \frac{2}{p^3}\,(p^6 + 4p^4 + 5p^2 + 2) \text{ und}$$

$$y_2 = \frac{p^7 + 9p^5 + 18p^3 + 10p}{p^6 + 8p^4 + 11p^2 + 2} = p + \frac{1|}{|p/5} + \frac{1|}{|25p/7} + \frac{1|}{|49p/30} + \frac{1|}{|3p/7}$$

Die zugehörige Abzweigschaltung, Abb. 8, hat also jetzt nur 5

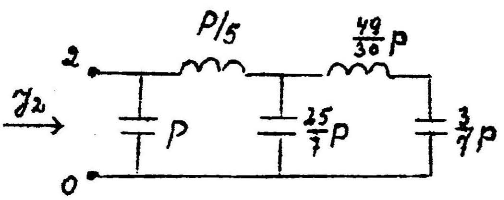


Abb. 8 An Knoten 2 äquivalente Abzweigschaltung zu Abb. 6

Schaltelemente gegenüber 7 der Abb. 6, so dass sich am Punkt 2 nur 3 statt 4 Eigenfrequenzen ergeben.

Zur Aufklärung dieser scheinbaren Unstimmigkeit muss man berücksichtigen, dass sich aus der Kettenbruchentwicklung von y_2 ergibt, dass Zähler und Nenner den gemeinsamen Teiler $2p^2 + 2$ haben[9]. Dieser Teiler ist aber auch eine Nullstelle des Zählers von y_2, also eine Eigenfrequenz. Sie liegt bei $p_0 = \pm j$; also bei $\omega_0 = \pm 1$. Man erhält daher <u>sämtliche</u> Eigenfrequenzen aus den Eigenfrequenzen der Ersatzschaltung und den Nullstellen der etwa vorhandenen gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner des Eingangsleitwertes.

---

[9] Die Kettenbruchentwicklung ist bekanntlich schon von Euklid zur Bestimmung des grössten gemeinsamen Teiles zweier Zahlen benutzt worden.

Anhang

Nach (1) ist

$$M = y\,\dot{\varphi} \qquad \text{(a)}$$

Falls det $y \neq 0$ ist, existiert die reziproke Matrix y^{-1}

$$\dot{\varphi} = y^{-1}M \qquad \text{(b)}$$

oder in ausführlicher Schreibweise unter der Voraussetzung, dass die Erregung des Systems durch ein Drehmoment M_1 an der Drehmasse 1 erfolgt ($M_2 = M_3 = \ldots = 0$):

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{1}{\det y} \begin{bmatrix} +\det_{11}y & -\det_{21}y & +\det_{31}y & \cdots \\ -\det_{12}y & +\det_{22}y & -\det_{32}y & \cdots \\ +\det_{13}y & -\det_{23}y & +\det_{33}y & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}$$

daraus

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\det_{11}y}{\det y}\, M_1 \qquad \text{(d)}$$

bzw. der Eingangsleitwert

$$\frac{M_1}{\dot{\varphi}_1} = y_1 = \frac{\det y}{\det_{11}y} \qquad \text{(e)}$$

Das ist die Formel (6) des Berichtes, falls man statt der Drehmasse 1 die Drehmasse k erregt.

Da y von der Frequenz ω abhängt, kann für bestimmte Frequenzen det $y = 0$ sein. Dann ist die Ableitung der Formel (e) nicht möglich, denn es würden jetzt bei endlichem M unendliche Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}$ auftreten bzw. es treten auch ohne Erregung ($M = 0$) endliche $\dot{\varphi}$ auf. Diese aus der Bedingung det $y = 0$ folgenden Frequenzen sind die Eigenfrequenzen, um deren Bestimmung es sich in diesem Bericht handelt.